Esercizi aggiuntivi Tutorato 1

Riccardo Marchesin & Cesare Straffelini

Settembre 2022

ATTENZIONE:

I seguenti esercizi sono proposti dai noi tutor, non dal professore. Quindi, ricordatevi che

1. Non sono necessari per la preparazione dell'esame.
2. Le difficoltà possono essere "sbilanciate". Passate oltre se qualche punto vi sembra troppo difficile!
3. Alcuni sono volutamente "vaghi" perché pensati con l'obiettivo di suscitare discussione in classe durante il tutorato. Per lo stesso motivo abbiamo aggiunto delle riflessioni meno tecniche e più filosofiche.
4. Questi fogli sono un work in progress. La speranza è che migliorino ogni anno. Se li trovate confusionari, se pensate si possa aggiungere qualcosa per migliorarli, se avete ogni tipo di consiglio: ditecelo!

Implicazioni inverse

1. Considerate le implicazioni inverse dell'esercizio del Tutorato 1.

$$q \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg p)$$

$$\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$$

Dimostratele o trovate un controesempio (ovvero un'assegnazione di verità per p e q che renda falsa l'implicazione)

Il Terzo Escluso Avete già visto alcuni di questi esercizi nelle slides di Zunino della settimana scorsa, ma ci tenevamo a darvi più esercizi riguardanti la regola legge del terzo escluso, vista la sua importanza (anche dal punto di vista filosofico: alcuni logici ritengono che il terzo escluso non possa essere preso come assioma poiché non è costruttivo. Infatti $p \vee \neg p$ non dice *quale* tra p e $\neg p$ sia vera, rendendo quindi impossibile usare la legge del terzo escluso per costruire esempi o controesempi. Una simile critica può essere fatta al lemma di Zorn).

2. Dimostrate le proposizioni seguenti. Ciascuna di esse è dimostrabile soltanto usando la legge del terzo escluso da qualche parte durante la dimostrazione.

- $\neg\neg p \to p$ (doppia negazione);
- $(\neg p \to \texttt{falso}) \to p$ (*reductio ad absurdum*);
- $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (contrapposizione);
- $((p \to q) \to p) \to p$ (legge di Peirce);
- $(\neg p \to p) \to p$ (*consequentia mirabilis*).

3. Dimostrate le proposizioni seguenti *senza* applicare la legge del terzo escluso (né le sue conseguenze viste nell'esercizio precedente). Una proposizione che si può dimostrare senza la legge del terzo escluso è un TEOREMA INTUIZIONISTICO.

- $p \to \neg\neg p$;
- $\neg\neg\neg p \to \neg p$;
- $p \to (\neg p \to \texttt{falso})$;
- $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$;
- $p \to (q \to p)$;
- $\neg\neg(p \vee \neg p)$: questo è difficile da provare ma molto importante (cfr. es. 4).

4. Grazie all'ultimo punto dell'esercizio 3, possiamo provare il rinomato *teorema di Glivenko*, che asserisce il fatto seguente: ogniqualvolta una proposizione φ è un teorema (cioè è provabile usando le regole di deduzione che avete studiato in classe, terzo escluso compreso), la sua doppia negazione $\neg\neg\varphi$ è un teorema intuizionistico (è provabile usando le stesse regole di deduzione, meno il terzo escluso), e viceversa. Convincetevi che il teorema di Glivenko sia ragionevole.

Negare i quantificatori Le seguenti regole vi permettono di riscrivere la negazione di un quantificatore utilizzando l'altro

5 (Negazione di $\exists$)**.** Dimostrare che

$$\neg(\exists x.\ p(x)) \Leftrightarrow (\forall y.\ \neg p(y)))$$

Intuitivamente, questo teorema è sensato: dire "non esistono cani verdi" equivale a dire "tutti i cani non sono verdi".

Suggerimento (1). Usate il terzo escluso

Suggerimento (2). Usate la regola del "Taglio". Ad esempio potrebbe esservi utile l'implicazione $p(z) \Rightarrow (\exists x.\ p(x))$

6 (Negazione di $\forall$)**.** Dimostrare che

$$\neg(\forall x.\ p(x)) \Leftrightarrow (\exists y.\ \neg p(y))$$

Intuitivamente, questo teorema è sensato: dire "non tutti i gatti sono grigi" equivale a dire "esiste un gatto non grigio".

Suggerimento. Usate l'equivalenza dimostrata con l'esercizio precedente.

Se non volete usare l'esercizio precedente, partite con l'implicazione $\Leftarrow$, che è più semplice.

Importanza delle parentesi: il paradosso del bevitore Quando sono presenti i quantificatori, le parentesi diventano estremamente importanti. Considerate la seguente proposizione

$$P \coloneqq (\exists x.\ p(x)) \Rightarrow (\forall y.\ p(y))$$

Questa P è *in generale* falsa: per convincervene, pensate alla frase "Esiste un gatto nero, quindi tutti i gatti sono neri". Attenzione però! Esistono dei casi limite in cui può diventare vera: per esempio, se la proposizione p è banalmente vera, ad esempio

$$p(x) \coloneqq x \text{ è uguale a } x$$

Allora P diventa vera (**dire perchè**). Quindi, visto che P può essere vera o falsa a seconda del valore di p, non riusciremo a dimostrare né P, né la sua negazione.

Sorprendentemente, basta cambiare di poco le parentesi dell'esercizio di prima, per ottenere una proposizione sempre vera.

7. Dimostrate che

$$\exists x.\ (p(x) \Rightarrow (\forall y.\ p(y))).$$

Suggerimento. Ricordatevi che il terzo escluso può essere usato anche per termini più elaborati rispetto al semplice $p \vee \neg p$

La proposizione appena dimostrata è anche nota come "Paradosso del bevitore", in quanto si può riformulare nel modo seguente "Esiste una persona tale che se lei beve, allora tutti bevono".

> **Morale**: Le implicazioni in logica si comportano diversamente dalle implicazioni nel linguaggio naturale!
> La proposizione $p \Rightarrow q$ può essere vera anche senza che ci sia un rapporto causalità tra p e q. Nonostante questo ci sono molti casi in cui l'intuizione "naturale" aiuta a dimostrare una proprietà formale, quindi non ignoratela completamente.

Osservazione (Cesare)*.* Qui ovviamente si apre un dibattito filosofico sulla questione se l'*implicazione materiale* (quella che studiamo in questo corso, chiamata anche implicazione filoniana da Filone di Megara) sia o meno la giusta interpretazione semantica dell'implicazione. Altri filosofi ritengono invece che debba esserci un nesso causale tra protasi ed apodosi. Ovviamente non c'è una risposta corretta, ma nella maggior parte della matematica odierna si usa l'implicazione materiale, quindi meglio adattarsi, anche se a volte è controintuitiva.

Le regole del Sudoku

8. Usate la seguente proposizione come base per definire formalmente le regole del Sudoku

$$p(r, c, n) \coloneqq \text{“La casella a riga } r \text{ e colonna } c \text{ contiene il numero } n\text{”}$$

Attenzione Sappiamo che il testo di questo esercizio non è ottimale: andrebbe migliorato in una versione successiva (o nei prossimi anni), ad esempio dividendolo in parti. Saltatelo pure, o prendetelo come uno spunto di riflessione, invece che come un esercizio vero e proprio.

Osservazione. Ci sono diverse maniere di affrontare l'esercizio. Dato che il Sudoku ha un numero finito di righe e di colonne, non è necessario usare i quantificatori $\forall$ e $\exists$. Al loro posto potrebbe essere comodo adoperare i simboli $\bigvee$ e $\bigwedge$, qui definiti come

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \quad \text{e} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$