Esercizi aggiuntivi Tutorato 2

Riccardo Marchesin & Cesare Straffelini

Settembre 2022

ATTENZIONE:
I seguenti esercizi sono proposti dai noi tutor, non dal professore.
Quindi, ricordatevi che

1. Non sono necessari per la preparazione dell'esame.
2. Le difficoltà possono essere "sbilanciate". Passate oltre se qualche punto vi sembra troppo difficile!
3. Alcuni sono volutamente "vaghi" perché pensati con l'obiettivo di suscitare discussione in classe durante il tutorato. Per lo stesso motivo abbiamo aggiunto delle riflessioni meno tecniche e più filosofiche.
4. Questi fogli sono un work in progress. La speranza è che migliorino ogni anno. Se li trovate confusionari, se pensate si possa aggiungere qualcosa per migliorarli, se avete ogni tipo di consiglio: ditecelo!

1. Fate gli esercizi delle scorse settimane, e quelli delle diapositive di Zunino

Insiemi Finiti e Infiniti

2. Dare una definizione di cos'è secondo voi un insieme finito/infinito (basta darne una, l'altra è il contrario). Non esiste un'unica risposta corretta, riesco a pensarne almeno tre nettamente diverse ma probabilmente ce ne sono di più.

3. Dimostrare che (con la vostra definizione di finito):

- un sottoinsieme di un insieme finito è finito
- unione di finiti insiemi finiti è finita
- l'insieme delle parti di un insieme finito è finito
- l'immagine di un insieme finito attraverso una mappa è finita

4. Siano X e Y insiemi **finiti** e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ due funzioni *iniettive*. Dimostrare che esiste una funzione *bigettiva* da X in Y.

5. Se togliamo l'ipotesi X e Y finiti dall'esercizio precedente, la tesi resta vera?

Funzioni Monotone Ricordiamo che per definizione una funzione

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

è MONOTONA se, per ogni $A \subseteq B \subseteq X$, si ha $f(A) \subseteq f(B)$.

6. Mostrate che le seguenti funzioni sono monotone. A meno che non sia specificato diversamente si avrà $A \in \mathcal{P}(X)$, con X insieme generico.

- $f(A) \coloneqq A$
- $f(A) \coloneqq \{2x | x \in A\}$, con $X = \mathbb{N}$.
- $f(A) \coloneqq A \cap B$, con $B \in \mathcal{P}(X)$ generico
- $f(A) = (\mathcal{C} \circ g \circ \mathcal{C})(A)$, dove g è una qualunque funzione monotona, e $\mathcal{C}$ è la funzione complementare, che dato A ritorna $X \setminus A$.
- $\mathrm{Im}_\varphi(A) \coloneqq \{\varphi(x) \mid x \in A\}$, dove φ è una qualunque funzione da X in sé stesso.

7. Date un esempio di funzione non monotona.

Teoremi I prossimi due esercizi sono impegnativi, ma guidati.

8 (Teorema di Knaster-Tarski)**.** Sia $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ monotona. Dimostrare che esiste un MINIMO PUNTO PREFISSO, cioè esiste $A \subseteq X$ tale che $f(A) \subseteq A$ e, per ogni $B \subseteq X$, se $f(B) \subseteq B$ allora $A \subseteq B$. Svolgimento guidato:

1. Consideriamo la famiglia $Y := \{B | \ f(B) \subseteq B\}$ e poniamo $A := \bigcap Y$.
2. Verifichiamo che, se $B \subseteq X$ è tale che $f(B) \subseteq B$ allora $A \subseteq B$.
3. Verifichiamo che $f(A) \subseteq A$. Questo equivale a richiedere che $f(A) \subseteq \bigcap Y$, cioè che $f(A) \subseteq B$ per ogni $B \in Y$, ma ricordiamo che vale $f(B) \subseteq B$ quindi... come concludiamo? Si dovrà usare l'ipotesi che f è monotona...

9 (Teorema di Schröder-Bernstein)**.** Vogliamo dare una risposta affermativa alla domanda dell'esercizio 5. Siano quindi X e Y due insiemi qualunque, $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funzioni iniettive. Vogliamo *costruire* $h : X \to Y$ bigettiva.

1. Indichiamo con $f[S]$ l'immagine di S attraverso f, cioè

   $$f[S] := \{y \in Y \mid \exists s \in S.\ f(s) = y\}.$$

   Dimostrate che la funzione $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definita come

   $$\varphi(S) := X \setminus (g\,[Y \setminus f[S]])$$

   è monotona. (Per farlo, considerare due insiemi $S \subseteq T$ e dimostrare $f[S] \subseteq f[T]$, poi $(Y \setminus f[S]) \supseteq (Y \setminus f[T])$, e così via, a volte $\subseteq$ e altre $\supseteq$).

2. Applicare il teorema di Knaster-Tarski alla funzione φ. Questo produce un insieme C che soddisfa due condizioni: quali? Come le interpretiamo?

3. Dimostrare che g è surgettiva sull'insieme $X \setminus C$, cioè per ogni $x \in X \setminus C$ esiste $y \in Y$ con $g(y) = x$. In particolare, g, vista come mappa da Y in $X \setminus C$, è bigettiva e quindi invertibile.

4. Provare che la funzione $h : X \to Y$ così definita

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C; \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \setminus C. \end{cases}$$

è ben definita ed è bigettiva da X in Y (dunque è la funzione cercata).