Esercizi aggiuntivi Tutorato 4

Riccardo Marchesin, Cesare Straffelini, Marco Girardi

Settembre 2022

ATTENZIONE:
I seguenti esercizi sono proposti dai noi tutor, non dal professore.
Quindi, ricordatevi che

1. Non sono necessari per la preparazione dell'esame.
2. Le difficoltà possono essere "sbilanciate". Passate oltre se qualche punto vi sembra troppo difficile!
3. Alcuni sono volutamente vaghi perché pensati con l'obiettivo di suscitare discussione in classe durante il tutorato. Per lo stesso motivo in alcuni esercizi abbiamo aggiunto delle riflessioni meno tecniche e più filosofiche.
4. Questi fogli sono un work in progress. La speranza è che migliorino ogni anno. Se li trovate confusionari, se pensate si possa aggiungere qualcosa per migliorarli, se avete ogni tipo di consiglio: ditecelo!

1 (Famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^2$)**.** Dati due punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, definiamo la *distanza*

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Dati un punto $P \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}$, la *palla di centro P e raggio r* è definita come

$$\mathcal{B}_P(r) := \{q \in \mathbb{R}^2 | d(p, q) < r\}$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Diciamo che A è un insieme *aperto* se

$$\forall a \in A. \exists r > 0 \text{ t.c. } \mathcal{B}_a(r) \subseteq A$$

Definiamo la famiglia $\mathcal{O}$ degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^2$ come segue

$$\mathcal{O} := \{A \subseteq \mathbb{R}^2 | \forall a \in A. \exists r > 0 \text{ t.c. } \mathcal{B}_a(r) \subseteq A\}$$

1. Provate a dimostrare le affermazioni seguenti:
   - $\emptyset \in \mathcal{O}$;

- $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{O}$;
- $A, B \in \mathcal{O} \implies A \cup B \in \mathcal{O}$;
- $A, B \in \mathcal{O} \implies A \cap B \in \mathcal{O}$;
- $\mathbb{Q}^2 \notin \mathcal{O}$.
  Suggerimento. Sia $Q \in \mathbb{Q}^2$ e sia $r > 0$. $\mathcal{B}_Q(r) \subseteq \mathbb{Q}^2$?

2. Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$ una famiglia infinita di insiemi aperti. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

   - $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$;
   - $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{O}$.
     Suggerimento. Sia $P \in \mathbb{R}^2$. Considerate la famiglia
     $\mathcal{A} = \{\mathcal{B}_P(r) | r \in \mathbb{R}, r > 0\} \subseteq \mathcal{O}$. $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{O}$?

2 (Approfondimento sugli insiemi verticali)**.** Per insiemi verticali intendiamo quelli appartenenti alla famiglia $\mathcal{X} \in \mathcal{P}([0,1] \times [0,1])$ definita nel foglio di esercizi del tutorato numero 4.

- E' possibile trovare una famiglia finita di insiemi non verticali la cui unione sia un insieme verticale? E una famiglia infinita?

- E' possibile trovare una famiglia finita di insiemi non verticali la cui intersezione sia un insieme verticale? E una famiglia infinita?

3 (Gli insiemi orizzontali)**.** Passiamo ora a studiare un'altra famiglia di insiemi, e le sue interazioni con la famiglia di insiemi verticali.

- Dare una definizione di insieme *orizzontale*.

- Sia $\mathcal{X}$ la famiglia degli insiemi verticali e $\mathcal{Y}$ quella degli insiemi orizzontali. Dimostrare o trovare un controesempio per la seguente affermazione

$$\forall\, A \in \mathcal{X}.\ \forall\, B \in \mathcal{Y}. \quad A \cap B \text{ è un insieme finito.}$$

- Quali sono gli insiemi sia verticali che orizzontali (ovvero quelli in $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$)?

4 (Gli insiemi semidiagonali)**.** Definiamo ora la famiglia di insiemi *semidiagonali.* Diremo che $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ è *semidiagonale* se rispetta le seguenti condizioni

$$(x, y) \in A \Rightarrow (x, x) \in A. \tag{1}$$

$$(x, y) \in A \Rightarrow (y, y) \notin A. \tag{2}$$

- La famiglia di insiemi semidiagonali ammette minimo? E massimo?

- Mostrare che intersezione e unioni di insiemi semidiagonali sono ancora semidiagonali.

- Mostrare che se A è semidiagonale allora $[0,1] \times [0,1] \setminus A$ non è semidiagonale

Indizio: Nonostante sia possibile risolvere questo esercizio usando solo la definizione, il tutto diventa molto più immediato una volta che uno ha capito come sono fatti tutti gli insiemi semidiagonali.
Attenzione: Il termine semidiagonale è stato appositamente inventato per dare un nome a questo esercizio. NON USATELO, nè aspettatevi di trovarlo in libri o altre risorse.