Esercizi aggiuntivi Tutorato 5

Riccardo Marchesin, Cesare Straffelini, Marco Girardi

Ottobre 2022

ATTENZIONE:
I seguenti esercizi sono proposti dai noi tutor, non dal professore.
Quindi, ricordatevi che

1. Non sono necessari per la preparazione dell'esame.
2. Le difficoltà possono essere "sbilanciate". Passate oltre se qualche punto vi sembra troppo difficile!
3. Alcuni sono volutamente vaghi perché pensati con l'obiettivo di suscitare discussione in classe durante il tutorato. Per lo stesso motivo in alcuni esercizi abbiamo aggiunto delle riflessioni meno tecniche e più filosofiche.
4. Questi fogli sono un work in progress. La speranza è che migliorino ogni anno. Se li trovate confusionari, se pensate si possa aggiungere qualcosa per migliorarli, se avete ogni tipo di consiglio: ditecelo!

Nota: In tutti gli esercizi "definire induttivamente X" significa dare un insieme di regole tale che X è il minimo punto prefisso dell'operatore delle conseguenze immediate.

1 (Unione disgiunta)**.** Sia l'insieme $A = \{\text{rosso, giallo, blu}\}$. Si consideri l'insieme $A + \mathbb{N}$ definito dalle seguenti regole

$$\frac{}{\mathsf{inl}(a)}[a \in A] \qquad \frac{}{\mathsf{inr}(n)}[n \in \mathbb{N}]$$

- Si tratta di un insieme finito?
- $42 \in A + \mathbb{N}$?
- $\mathsf{inl}(4) \in A + \mathbb{N}$?
- $\mathsf{inl}(\text{rosso}) \in A + \mathbb{N}$?
- Descrivere intuitivamente quali sono gli elementi di $A + \mathbb{N}$

- Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathsf{inr}(n) \in A + \mathbb{N} \Rightarrow \mathsf{inr}(n+2) \in A + \mathbb{N}$

Dati due insiemi X e Y, l'insieme $X + Y$ è solitamente chiamato *coprodotto* di X e Y. Con questa costruzione si possono unire due insiemi "come se fossero disgiunti", ricordandosi la provenienza di ciascun elemento.

2 (Funzioni e relazioni)**.** In questo esercizio consideriamo funzioni e relazioni su $\mathbb{Z}$ (quindi sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- Dare l'esempio di una relazione che non è una funzione
- Consideriamo $R = \emptyset$. R è una relazione? R è una funzione?
- Rispondere alle domande del punto precedente considerando relazioni in $(\emptyset \times \mathbb{Z})$ invece che in $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

3 (Sequenze)**.** Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle sequenze di interi, definito induttivamente dalle regole

$$\frac{}{\epsilon} \qquad \frac{s}{n : s}(n \in \mathbb{N}).$$

Sia $\mathcal{S}_1$ l'insieme definito induttivamente dalle regole

$$\frac{}{\epsilon} \qquad \frac{s}{1 : s}.$$

- Descrivere intuitivamente l'insieme $\mathcal{S}_1$.
- Dimostrare, usando il principio di induzione, che $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$.
- Definite induttivamente la relazione $\sqsubseteq \in \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{S})$, in maniera che valga "$r \sqsubseteq s$ se e solo r è una sottosequenza di s" (per esempio, $(2 : \epsilon) \sqsubseteq (5 : 2 : \epsilon)$, mentre $(2 : 1 : \epsilon) \not\sqsubseteq (3 : 3 : 1 : \epsilon)$.
- Definire induttivamente la relazione $\preceq \in \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{S})$, in maniera che valga "$r \preceq s$ se e solo r è più corta (o ha la stessa lunghezza) di s". (per esempio, $(1 : \epsilon) \preceq (5 : 2 : \epsilon)$, e $(2 : 4 : 1 : \epsilon) \preceq (3 : 3 : 1 : \epsilon)$.
- Mostrare che $\sqsubseteq \subseteq \preceq$. (Attenzione: a seconda di come avete risolto gli esercizi precedenti, questo potrebbe essere relativamente facile, oppure costringervi a fare delle dimostrazioni per induzione "dentro" ad altre dimostrazioni per induzione).
- Definire induttivamente una relazione $L \subseteq \mathcal{S} \times \mathbb{N}$, che associa ad ogni sequenza la sua lunghezza. Ad esempio, vogliamo $(\epsilon)\ L\ 0$ e $(1 : 3 : \epsilon)\ L\ 2$.
- Mostrare che L e una funzione. (Lungo. Seguite la traccia fatta sulle slide per il fattoriale)
- Dimostrare che $\sqsubseteq$ e $\preceq$ sono ordini parziali sull'insieme delle sequenze.

4 (Misto geometrico)**.** Sia $n \geq 1$. Definiamo gli insiemi $\mathcal{H}, \mathcal{X}$ e $\mathcal{V}$ nella seguente maniera:

$$\mathcal{H} = \{W \subseteq \mathbb{R}^n \mid W \text{ è uno spazio vettoriale di dimensione } n-1\};$$

$\mathcal{X}$ è definito induttivamente dalle seguenti regole

$$\frac{}{W}(W \in \mathcal{H}) \qquad \frac{W_1 \quad W_2}{W_1 \cap W_2};$$

infine

$$\mathcal{V} = \{W \subsetneqq \mathbb{R}^n \mid W \text{ è uno spazio vettoriale}\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$.