Esercizi aggiuntivi Tutorato 6

Riccardo Marchesin, Cesare Straffelini, Marco Girardi

Novembre 2022

ATTENZIONE:
I seguenti esercizi sono proposti dai noi tutor, non dal professore.
Quindi, ricordatevi che

1. Non sono necessari per la preparazione dell'esame.
2. Le difficoltà possono essere "sbilanciate". Passate oltre se qualche punto vi sembra troppo difficile!
3. Alcuni sono volutamente vaghi perché pensati con l'obiettivo di suscitare discussione in classe durante il tutorato. Per lo stesso motivo in alcuni esercizi abbiamo aggiunto delle riflessioni meno tecniche e più filosofiche.
4. Questi fogli sono un work in progress. La speranza è che migliorino ogni anno. Se li trovate confusionari, se pensate si possa aggiungere qualcosa per migliorarli, se avete ogni tipo di consiglio: ditecelo!

1 (Alberi)**.** L'insieme $\mathcal{A}$ degli alberi è definito induttivamente dalle seguenti regole:

$$\frac{}{n}\,[n \in \mathbb{N}] \qquad\qquad \frac{s \quad t}{(s \;\; t)}$$

- Le seguenti regole descrivono X, una famiglia di alberi

  $$\frac{}{n}[n \in \mathbb{N}] \qquad\qquad \frac{t}{(n \;\; t)}[n \in \mathbb{N}]$$

  Che tipo di elementi costituiscono la famiglia X? (Dare una descrizione intuitiva)

- Dimostrare *per induzione* che l'insieme Y definito dalle regole seguent è contenuto in X.

  $$\frac{}{1} \qquad \frac{t}{(1 \;\; t)}$$

- Date una definizione induttiva dell'altezza di un albero, che sarà una relazione $H \in \mathcal{P}(\mathcal{A} \times \mathbb{N})$.(Bonus: Mostrare che H è una funzione).

- Dare la definizione induttiva degli "alberi bilanciati", ovvero gli alberi A tali che ogni nodo di A ha tante foglie tra i discendenti a destra quante quelle che ha tra i discendenti a sinistra.
  Suggerimento: Per risolvere questo esercizio torna comoda la definizione induttiva di altezza.

Esercizi presi da esami

Di seguito trovate gli esercizi assegnati negli esami del 20 Gennaio 2020 e 20 Luglio 2020

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme S delle sequenze di numeri naturali (regole $[S0], [S1]$), una relazione $\Sigma \in \mathcal{P}(S \times \mathbb{N})$ (regole $[\Sigma 0], [\Sigma 1]$) e una relazione $R \in \mathcal{P}(S \times S \times S)$ (regole $[R0], [R1]$). Sotto, n, k, k_1, k_2 indicano naturali mentre s, s_1, s_2, s_3 indicano sequenze in S.*

$$\frac{}{\epsilon}[S0] \qquad \frac{s}{n : s}(n \in \mathbb{N})[S1] \qquad \frac{}{\Sigma(\epsilon,\ 0)}[\Sigma 0] \qquad \frac{\Sigma(s,\ k)}{\Sigma(n : s,\ n + k)}[\Sigma 1]$$

$$\frac{}{R(\epsilon,\ s,\ s)}[R0] \qquad \frac{R(s_1,\ n : s_2,\ s_3)}{R(n : s_1,\ s_2,\ s_3)}[R1]$$

1. *[20%] Si fornisca una sequenza s per cui valga $R(1 : 2 : \epsilon, 3 : 4 : \epsilon, s)$ e si giustifichi la risposta esibendo una derivazione.*

2. *[20%] Si enunci il principio di induzione associato alla relazione R.*

3. *[10%] Si consideri l'enunciato seguente:*

$$\forall s_1, s_2, s_3 \in S.\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}.\ R(s_1, s_2, s_3) \wedge \Sigma(s_1, k_1) \wedge \Sigma(s_2, k_2) \implies \Sigma(s_3, k_1 + k_2)$$

Si riscriva l'enunciato in modo logicamente equivalente nella forma

$$\forall s_1, s_2, s_3 \in S.\ R(s_1, s_2, s_3) \implies p(s_1, s_2, s_3)$$

per un qualche predicato p.

4. *[50%] Si concluda la dimostrazione dell'enunciato visto sopra usando il principio di induzione associato a R.*

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme T degli alberi binari con numeri interi nei nodi interni (regole $[T0], [T1]$) e una relazione $R \in \mathcal{P}(T \times T)$ (regole $[R0], [R1]$). Sotto, a, b, c indicano interi mentre s, d, t indicano alberi in T.*

$$\frac{}{\epsilon}[T0] \qquad \frac{s \quad d}{(s, a, d)}(a \in \mathbb{Z})[T1] \qquad \frac{}{R(\epsilon, \epsilon)}[R0] \qquad \frac{R(s, s') \quad R(d, d')}{R((s, a, d), (d', 10 - a, s'))}[R1]$$

1. *[20%] Si fornisca un albero t contenente esattamente 3 interi e un albero t' per cui valga $R(t, t')$ e si giustifichi la risposta esibendo una derivazione.*
2. *[20%] Si enunci il principio di induzione associato all'insieme T.*
3. *[10%] Si consideri l'enunciato seguente:*

$$\forall t, t' \in T.\ R(t, t') \implies R(t', t)$$

Si riscriva l'enunciato in modo logicamente equivalente nella forma

$$\forall t \in T.\ p(t)$$

per un qualche predicato p.

4. *[50%] Si concluda la dimostrazione dell'enunciato visto sopra usando il principio di induzione <u>associato a T</u>.*