Esercizi aggiuntivi Tutorato 7

Novembre 2022

Vecchi esami Esercizi 2 e 3 dell'esame di Febbraio 2020

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme T degli alberi binari di numeri naturali (regole $[T0], [T1]$), una relazione $R \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{N})$ (regole $[R0], [R1]$) e una relazione $Q \in \mathcal{P}(T \times T)$ (regole $[Q0], [Q1]$). Sotto, n, m indicano naturali mentre s, s', d, d', t, u indicano alberi in T.*

$$\frac{}{n}(n \in \mathbb{N})[T0] \qquad \frac{s \quad d}{(s,d)}[T1] \qquad \frac{}{R(n,n)}[R0] \qquad \frac{R(s,n) \quad R(d,m) \quad n \geq m}{R((s,d),n)}[R1]$$

$$\frac{}{Q(n,n+1)}[Q0] \qquad \frac{Q(s,s') \quad Q(d,d')}{Q((s,d),(s',d'))}[Q1]$$

1. *[20%]*

   Si fornisca un albero t contenente esattamente 5 naturali distinti per cui valga $R(t, 10)$ e si giustifichi la risposta esibendo una derivazione.

2. *[20%] Si enunci il principio di induzione associato alla relazione R.*

3. *[10%] Si consideri l'enunciato seguente:*

   $$\forall t, u \in T.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ R(t,n) \wedge Q(t,u) \implies R(u, n+1)$$

   Si riscriva l'enunciato in modo logicamente equivalente nella forma

   $$\forall t \in T, n \in \mathbb{N}.\ R(t,n) \implies p(t,n)$$

   per un qualche predicato p.

4. *[50%] Si concluda la dimostrazione dell'enunciato visto sopra usando il principio di induzione <u>associato a R</u>.*

Esercizio 3. *Si consideri la generalizzazione delle regole di inferenza ottenuta consentendo, oltre alle normali premesse, anche la presenza di "premesse negative", come mostrato sotto. La funzione* $\hat{\mathcal{R}}$ *viene quindi estesa a insiemi di tali regole* $\mathcal{R}$ *come segue.*

$$\text{nuova forma generale di una regola: } \quad \frac{x_1 \dots x_n \quad \neg z_1 \dots \neg z_m}{y}$$

$$\hat{\mathcal{R}}(X) = \left\{ y \;\middle|\; \exists \frac{x_1 \dots x_n \quad \neg z_1 \dots \neg z_m}{y} \in \mathcal{R}.\ x_1, \dots, x_n \in X \land z_1, \dots, z_m \notin X \right\}$$

1. *[40%] Si definisca* $\mathcal{R}$ *come l'insieme delle regole su* $U = \mathbb{N}$ *dato da* $\left\{ \frac{\neg x}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{N} \right\}$. *Si stabilisca se* $\hat{\mathcal{R}}$ *è una funzione monotona, fornendo una dimostrazione o un controesempio.*

2. *[60%] Considerando sempre lo stesso* $\hat{\mathcal{R}}$ *del punto sopra, si caratterizzi l'insieme dei punti prefissi di* $\hat{\mathcal{R}}$*, stabilendo se esiste il suo minimo punto prefisso.*

Vecchi esami Esercizi 2 e 3 dell'esame di Giugno 2020

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme* T *degli alberi binari di numeri naturali (regole* $[T0], [T1]$*), una relazione* $R \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ *(regole* $[R0], [R1]$*) e una relazione* $Q \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{N})$ *(regole* $[Q0], [Q1], [Q2]$*). Sotto,* a, b, c, n *indicano naturali mentre* s, d, t *indicano alberi in* T.

$$\frac{}{n}(n \in \mathbb{N})[T0] \qquad \frac{s \quad d}{(s,d)}[T1] \qquad \frac{a \le n \le b}{R(n,a,b)}[R0] \qquad \frac{R(s,a,c) \quad R(d,c,b) \quad a \le c \le b}{R((s,d),a,b)}[R1]$$

$$\frac{}{Q(n,n)}[Q0] \qquad \frac{Q(s,n)}{Q((s,d),n)}[Q1] \qquad \frac{Q(d,n)}{Q((s,d),n)}[Q2]$$

1. *[20%]*

   Si fornisca un albero t *contenente esattamente 5 naturali per cui valga* $R(t, 1, 20)$ *e si giustifichi la risposta esibendo una derivazione.*

2. *[20%] Si enunci il principio di induzione associato alla relazione* R.

3. *[10%] Si consideri l'enunciato seguente:*

   $$\forall t \in T.\ \forall a, b, n \in \mathbb{N}.\ R(t,a,b) \land Q(t,n) \implies a \le n \le b$$

   Si riscriva l'enunciato in modo logicamente equivalente nella forma

   $$\forall t \in T, a, b \in \mathbb{N}.\ R(t,a,b) \implies p(t,a,b)$$

   per un qualche predicato p.

4. *[50%] Si concluda la dimostrazione dell'enunciato visto sopra usando il principio di induzione <u>associato a R</u>.*

Esercizio 3. *Sia S l'insieme delle sequenze di numeri naturali definito induttivamente dalle regole*

$$\frac{}{\epsilon}[S0] \qquad \frac{s}{n : s}(n \in \mathbb{N})[S1]$$

Queste sequenze possono essere ordinate in modo lessicografico, *con lo stesso criterio con cui si ordinano le parole di un dizionario viste come sequenze di lettere. Per esempio:*

A) $5 : 2 : \epsilon \preceq 6 : \epsilon$	B) $5 : 2 : \epsilon \preceq 5 : 7 : 1 : \epsilon$
C) $5 : 4 : 7 : 20 : \epsilon \preceq 5 : 6 : \epsilon$	D) $5 : 4 : \epsilon \preceq 5 : 4 : 2 : \epsilon$

1. *[50%] Si definisca induttivamente tale relazione $(\preceq) \in \mathcal{P}(S \times S)$ fornendo un opportuno insieme di regole di inferenza.*

2. *[50%] Usando le regole proposte per la relazione $(\preceq)$ sulle sequenze, si costruisca una derivazione per i casi* C *e* D *di sopra, menzionando il nome di ogni regola che si sta usando.*