Esercizi slides 1

Riccardo Marchesin, Marco Girardi

September 2020

Disclaimer: questi esercizi sono copiati (a mano) dalle slide del corso; non è escluso che ci siano errori in giro.

1. Ipotesi: $p \land (q \land r)$. Tesi: $r \land p$.
2. Ipotesi: $p \lor q$. Tesi: $q \lor p$.
3. Ipotesi: $(p \land q) \lor (p \land r)$. Tesi: $p \land (q \lor r)$.
4. $(p \land q) \Rightarrow (q \land p)$
5. $(p \lor q) \Rightarrow (q \lor p)$
6. $((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
7. $((p \land q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
8. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \land q) \Rightarrow r)$
9. $((p \lor q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \land (q \Rightarrow r))$.
10. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
11. $\neg(p \land \neg p)$
12. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
13. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
14. $((\neg q) \Rightarrow (\neg p)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
15. $\neg(p \lor q) \iff (\neg p \land \neg q)$
16. $\neg(p \land q) \iff (\neg p \lor \neg q)$
17. $(p \Rightarrow q) \iff (\neg p \lor q)$
18. $\neg(p \Rightarrow q) \iff (p \land \neg q)$
19. $((p \land q) \lor r) \iff ((p \lor r) \land (q \lor r))$.
20. $((p \lor q) \land r) \iff ((p \land r) \lor (q \land r))$

21. Mostrare che l'uguaglianza è una relazione transitiva (usando le sole regole di introduzione ed eliminazione).

22. $(\forall x.\ p(x)) \wedge q \Rightarrow (\forall x.\ p(x) \wedge q)$

23. $(\forall x.\ p(x) \Rightarrow p(f(x))) \Rightarrow (\forall x.\ p(x) \Rightarrow p(f(f(x))))$

    Nei prossimi tre esercizi si possono usare liberamente proprietà note dall'aritmetica, per x, y naturali.

24. $\forall x.\ \exists y.\ y > x$.

25. $\nexists y.\ \forall x.\ y > x$.

26. $\exists y.\ \forall x.\ (y = x) \vee (y < x)$

27. In un ipotetica dimostrazione di $(\forall x.\ p(x)) \Rightarrow (\forall y.\ q(y))$ come vengono "scelte" la x e la y? E in $(\exists x.\ p(x)) \Rightarrow (\exists y.\ q(y))$.

28. Dimostrare che la formula $\forall x, y, z.\ p(x, y) \wedge q(y, z) \Rightarrow r(x, y, z)$ si può riscrivere come $\forall x, y.\ p(x, y) \Rightarrow (\forall z.\ q(y, z) \Rightarrow r(x, y, z))$.

29. Se l'insieme Y appartiene alla famiglia $\mathcal{X}$, allora$\bigcap \mathcal{X} \subseteq Y \subseteq \bigcup \mathcal{X}$

30. Esprimere una biezione tra $A \times B$ e $B \times A$.

31. Esprimere una biezione tra $A \times (B \times C)$ e $(A \times B) \times C$

32. Esprimere una biezione tra $\mathcal{P}(A)$ e $(A \to \{0, 1\})$

33. Esprimere una biezione tra$(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ e $(B \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$.

34. Esprimere una biezione tra $A \cup B$ e $(A \times \{0\}) \cup ((B \setminus A) \times \{1\})$

35. Sia $f \in (A \to B)$ arbitraria, e f^{-1} la relazione inversa di f. Mostrare che f è iniettiva se e solo se $f^{-1} \in (img(f) \to A)$

36. Definire una biezione f, e la sua inversa, tra $(A \cup B) \to C$ e $(A \to C) \times (B \to C)$, supponendo che $A \cap B = \emptyset$.